LN-02

به نام ِ پروردگار

مُعادله ی کِپلِر؛
روش های ِحل و بررسی آن در مدارات مختلف ِنیرو هایِ عکس ِمجذوری

علی ایزدی راد

hiairno@yahoo.com

چکیده:

معادله ی **زمان —مکان** جسم در مدارهای دایروی، بیضوی ، سهموی و بیضوی بررسی می شوند و به حل ِمعادله توسط ِروش های ِتقریبی پرداخته می شود

۱ مقدمه

از زمانی که بشر به این دست یافت که حرکت اجسام در اثر ِ گرانش ِموجود در منظومه ی ِشمسی ،باعث ِایجاد ِمدارهایی با ویژگی هایِ مشخص می شود بر آن شد که جنبه های ِگوناگون حرکت را واکاوی کند.یکی از مهمترین مسائل، یافتن ِمکان ِتابعِ زمان جسم ،$\overrightarrow{r(t)}$،بوده است . شاید کپلر از پیشگامان حل این مسئله بوده است ، به گونه ای که حل این مسئله مهم در ناوبری فضایی به معادله ی ِکپلر مشهور است .در این مقاله سعی داریم به بررسی این مسئله بپردازیم .

۲ فیزیک حرکت

۱.۲ بررسی خواص مهم تابع نیروی گرانش

طبق ِقانون ِجهانی ِگرانش نیروی گرانش ِناشی از اجسام (حداقل در محدوده ی ِمنظومه ی ِشمسی)به صورت ِزیر بیان می شود

$$\overrightarrow{F(r)}_{۱\to۲} = -\frac{Gm_۱m_۲}{r^۲}\hat{r} \qquad (۱)$$

از آن جا که این معادله ی ِنیروی تنها دارای ِبرداریکه ی ِشعاعی ($\hat{r}$)می باشد در نتیجه طبق ِتعریف ، این نیرو "مرکزی " است .با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}\nabla \times F &= \frac{۱}{r\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, F_\phi) - \frac{\partial\, F_\theta}{\partial\,\phi}]\,\hat{r} + \\ &\quad \frac{۱}{r}[\frac{۱}{\sin\theta}\,\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\, r}(rF_\phi)]\hat{\theta} + \frac{۱}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}]\hat{\phi} = ۰\end{aligned} \qquad (۲)$$

نتیجه گرفته می شود که نیروی ِگرانش یک نیروی ِ "مرکزی ِ همسانگرد ِ پایستار "است
.
تکانه زاویه ای پایستار است زیرا

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{\tau} = \vec{R}\times\vec{F} \\ &= (r\hat{r})\times(f(r)\hat{r}) = (r\cdot f(r))\ \hat{r}\times\hat{r} \\ &= ۰ \\ \Longrightarrow&\quad \vec{L} = constant\end{aligned} \qquad (۳)$$

۲.۲ حرکت دو جسم

اگر دو جسم در فضای ِایزوله در مجاورت ِیکدیگر قرار بگیرند مطابق ِقانون ِگرانش ِنیوتون (رابطه ی ِ۱ ,صفحه ی ِ۲) به یکدیگر نیرو وارد می کند که این نیرو در راستای ِخط ِواصِل ِدو جسم است. در دستگاه ِمختصات ِقطبی با مبداء ِدلخواه قانون ِدوم نیوتون را می توان این گونه نوشت

$$m_۱\ddot{r_۱} = F(r)\hat{r} \qquad (۴)$$

$$m_2\ddot{r_2} \quad = \quad -F(r)\hat{r} \tag{5}$$

بردارِواصل ِدو جسم ، $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$ است.با ترکیب ِمعادلات ِ(۴،۵):

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\ddot{r_1} - \ddot{r_2}) = F(r)\hat{r} \tag{6}$$

با تعریف ِجرم ِکاهیده به صورت ِ

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

معادله ی ِدو جسم(٦) را می توان به صورت ِصوری به شکل ِمعادله ی ِتک جرمی نوشت:

$$\mu\ddot{r} = F(r)\hat{r} \tag{8}$$

آن چه که ما انجام دادیم تبدیل ِدو معادله به یک معادله ی ِکلی تر است که در آن یک جسم ِمجازی به نام ِμ(۷) به دور ِیک جرم ِمرکزی ِ ثابت به جرم ِ$M = m_1 + m_2$ می گردد.
حال می خواهیم معادلات ِحرکت جسم ِ μ را بررسی کنیم.

$$\begin{aligned} \mu\ddot{\vec{r}} &= F(r)\hat{r} \\ \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} &= F(r)\hat{r} \end{aligned} \tag{9}$$

پس

$$\mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad = \quad 0 \tag{10}$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad = \quad F(r) \tag{11}$$

۳.۲ ثابت های حرکت

طبق ِمعادله ی ِ(۳) ، بردار ِتکانه زاویه ای ثابت است در نتیجه اندازه و جهت آن در فضا ثابت است و بنابر این اندازه ی ِتکانه زاویه ای را می توان به عنوان ِ" ثابت ِحرکت " در نظر

گرفت :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (r\hat{r}) \times \mu(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \mu r^{2}\dot{\theta}\hat{\phi} \qquad (۱۲)$$

در نتیجه

$$|\vec{L}| = L = \mu r^{2}\dot{\theta} = const \qquad (۱۳)$$

با استفاده از معادلاتِ (۳۱ و ۱۱)

$$\mu\ddot{r}\dot{r} - \frac{L^{2}}{\mu r^{3}}\dot{r} = F(r)\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^{2} + \frac{L^{2}}{2\mu}\frac{1}{r^{2}}\right) \qquad (۱۴)$$

حال در سمت ِ راستِ معادله

$$F(r)\dot{r} = -\frac{dV(r)}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{dV(r)}{dt} \qquad (۱۵)$$

که $V(r)$ تابع پتانسیلِ ناشی از تابعِ نیرویِ گرانشِ نیوتون است که توانستیم با برقراری ِ معادله یِ (۲) بنویسیم . حال از معادلاتِ (۵۱و ۴۱)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^{2} + \frac{L^{2}}{2\mu}\frac{1}{r^{2}} + V(r)\right) = 0 \qquad (۱۶)$$

و در آخر به ثابت ِ دیگر حرکت که آن را " انرژی مکانیکی ِ جسم " می نامیم ، می رسیم

$$E = constant = \frac{1}{2}\left(\mu\dot{r}^{2} + \frac{L^{2}}{\mu r^{3}}\right) + V(r) = \frac{1}{2}\mu v^{2} + V(r) = K + V \qquad (۱۷)$$

۴.۲ حل معادلات حرکت با استفاده از ثوابت حرکت

با استفاده از معادله یِ (۱۷)

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V) - \frac{L^{2}}{\mu^{2}r^{3}}} \qquad (۱۸)$$

از طرفی

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^{۲}} \qquad (۱۹)$$

با ترکیبِ دو معادله

$$\theta(r) - \theta(۰) = \int_{r'_{۰}}^{r'} \frac{(\frac{L}{\mu r^{۲}})dr}{\sqrt{\frac{۲}{\mu}(E - V) - \frac{L^{۲}}{\mu^{۲} r^{۲}}}} \qquad (۲۰)$$

پس از حلِ این انتگرال و توجه به علامتِ پارامتر ها و قرار دادنِ $V(r) = \int F(r) \cdot dr = \frac{-k}{r}$
پس از کمی ساده سازی میرسیم به :

$$r = \frac{\frac{L^{۲}}{\mu k}}{۱ + \sqrt{۱ + \frac{۲EL^{۲}}{\mu k^{۲}}} \sin\theta} \qquad (۲۱)$$

معادله یِ (۲۱) فرمِ کلیِ تابعِ مکانِ جرم کاهیده به دورِجسمِ مرکزی را به دست می دهد.که از مشابهت آن با معادله یِ کلیِ مقاطعِ مخروطی ، در می یابیم که مسیرِحرکتِ جسم ناشی از نیرویِ گرانش به صورتِ " دایره—بیضی —سهمی (یا خطِ راست)—هذلولی " خواهد بود

۵.۲ مقاطع مخروطی

فرمِ کلی یِ مقاطعِ مخروطی به صورت هایِ زیر است :

$$r = \begin{cases} a & circle\ orbits \\ \frac{a(۱-e^{۲})}{۱+e\cos\theta} & Elipse\ orbits \\ \frac{۲p}{۱+\cos\theta} & quadratic\ orbits \\ \frac{a(e^{۲}-۱)}{۱+e\cos\theta} & parabola\ orbits \end{cases}$$

از برابریِ معادلا ت می توان به رابطه یِ پارامتر هایِ هندسی با پارامترهایِ مداری دست یافت.

۳ معادله ی کپلر برای مدارهای بیضوی

دانستیم که معادله ی حرکتِ جسم در مسیر بیضوی به صورت زیر است :

$$r = \frac{a(۱ - e^{۲})}{۱ + e\cos\theta}$$

طبق ِقانون دوم کپلر

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\frac{r^{۲}\theta}{۲}}{dt} \\ &= \frac{L}{۲\mu} = const \\ &= \frac{A_{ecllipse}}{T} = \frac{\pi ab}{T} \end{aligned} \tag{۲۲}$$

در نتیجه :

$$\begin{aligned} \int dA &= \frac{\pi ab}{T} t \\ &= \frac{۱}{۲} \int r^{۲} d\theta \\ &= \int_{۰}^{\theta} \frac{a^{۲}(۱-e^{۲})^{۲}}{(۱+e\cos\theta)^{۲}} d\theta \end{aligned} \tag{۲۳}$$

با انتگرال گیری و کمی ساده سازی داریم

$$\frac{۲\pi t}{T} = ۲\arctan\left(\sqrt{\frac{۱-e}{۱+e}}\tan\frac{\theta}{۲}\right) - \frac{e\sqrt{۱-e^{۲}}\sin\theta}{۱+e\cos\theta} \tag{۲۴}$$

اگر تعریف کنیم :

$$\tan\frac{E}{۲} = \sqrt{\frac{۱-e}{۱+e}}\tan\frac{\theta}{۲} \tag{۲۵}$$

آنگاه :

$$\frac{۲\pi t}{T} := M = E - e\sin E \tag{۲٦}$$

معادله ی ِ(۲٦)را « **معادله ی ِکپلر** » می گویند
E به زاویه آنومالی ِخروج از مرکزی مشهور است .

۴ معادله ی کپلر برای مدار سهموی

$$\begin{aligned} \int dA &= \frac{\pi ab}{T} t \\ &= \frac{۱}{۲} \int r^{۲} d\theta \end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$= \int_{0}^{\theta} \frac{4p^{2}}{(1+\cos\theta)^{2}} d\theta$$

$$= \frac{p^{2}}{2}\int_{0}^{\theta} sec\frac{\theta}{2}^{4} d\frac{\theta}{2} \quad (28)$$

$$(29)$$

اما :

$$L = r_p V_p = p\sqrt{\frac{2\mu}{p}} \quad (30)$$

و اگر تعریف کنیم :

$$T := \frac{2\pi(2p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \quad (31)$$

آن گاه با حلِ انتگرال داریم :

$$\frac{2\pi t}{T} := M = \frac{1}{2}\Big(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^{3}\frac{\theta}{3}\Big) \quad (32)$$

و حال اگر تعریف کنیم :

$$E := \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} \quad (33)$$

داریم

$$\frac{2\pi t}{T} = M = E + \frac{1}{3}E^{3} \quad (34)$$

رابطه ی بالا معادله ی کپلر در سهمی است .

۵ معادله ی کپلر در مدار هذلولی

مطابقِ گفته هایِ قبلی

$$\int dA = \frac{\pi ab}{T} t \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2}\int r^{2} d\theta$$

$$= \int_{0}^{\theta} \frac{a^{2}(e^{2}-1)^{2}}{(1+e\cos\theta)^{2}} d\theta$$

اکنون با تعریف زیر

$$T = \frac{۲\pi(a)^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{\mu}} \tag{۳۶}$$

و محاسبه ی L در هذلولی می رسیم به این که :

$$\begin{aligned} \frac{۲\pi t}{T} =: M &= \int \frac{(e^{۲}-۱)^{\frac{۳}{۲}}}{(۱+e\cos\theta)^{۲}} d\theta \\ &= \frac{۱}{۱+e\cos\theta}\Big(-۲tanh^{-۱}\Big[\sqrt{\frac{e-۱}{e+۱}}\tan\frac{\theta}{۲}\Big]\Big) - \\ & \frac{۱}{۱+e\cos\theta}\Big(۲etanh^{-۱}\Big[\sqrt{\frac{e-۱}{e+۱}}\tan\frac{\theta}{۲}\Big]\cos\theta - e\sqrt{e^{۲}-۱}\sin\theta\Big) \end{aligned} \tag{۳۷}$$

اگر تعریف کنیم :

$$\tanh\frac{E}{۲} = \sqrt{\frac{e-۱}{e+۱}}\tanh\frac{\theta}{۲} \tag{۳۸}$$

آ نگاه :

$$\frac{۲\pi t}{T} = M = e\sinh E - E \tag{۳۹}$$

معادله ی بالا معادله ی کپلر در هذلولی می باشد

۶ روش های حل

دانستیم که معادله کپلر که رابطه ی میان زمان ومکان جسم را در مدارش به دور جسم مرکزی به دست می دهد در حالت بیضوی به صورت زیر است و در دیگر مدار ها هم معادله را به دست اوردیم

$$M = E - e\sin E$$

اکنون می خواهیم به این مسپله بپردازیم که :"چگونه با داشتن Mو e می توان E را پیدا نمود؟" . از آنجا که معادله کپلر یک معادله ی خطی و سر راستی نیست، باید به کمک روش های حل تقریبی به حل آن اقدام کنیم .

در اینجا چندین روش را بیان می کنیم .قبل از هر چیز باید توجه داشته باشیم که در این معادله E بر حسب رادیان بیان می شود!

۱.۶ مقدمه

ریشه یابی معادلات تک متغیری (در اینجا $x = E$ متغیر است.)همراه با سه محدودیت است که به زبانِ ریاضی داریم:

الف) $y = f(x)$ در فاصله ی $[a, b]$ که $a < b$ پیوسته باشد

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

ب)

$$f'(x) \neq 0 \qquad \forall \in [a, b]$$

ج)

زیرا:

الف) ریشه را باید در بازه ای مشخص پیدا کرد

ب) باید در آن بازه ریشه ای وجود داشته باشد

ج) ریشه معادله در آن بازه یکتا باشد

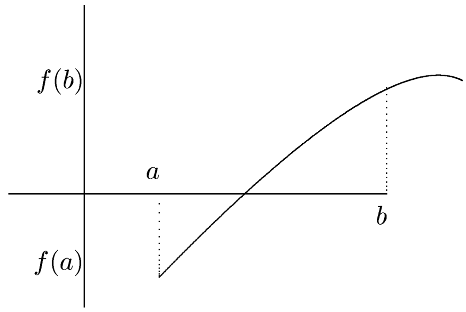
۲.۶ روش نصف فاصله(تنصیف)

با توجه به شکل ، الگوریتم زیر را پیاده می کنیم :
پس از برقراری سه شرط مذکور ، نخست مقدارِ C را که برابر است با $C = \frac{a+b}{2}$ محاسبه می کنیم . سپس $f(c)$ را با $f(a)$ مقایسه می کنسم اگر $f(c)$ و $f(a)$ هم علامت بودند، مقدار c را به جای مقدارِ a جایگذاری می کنیم و اگر $f(c)$ و $f(b)$ هم علامت بودند ، مقدار c را به جای مقدارِ b جایگزین می کنیم .این کار را انجام می دهیم تا $f(c)$ از دقتِ خواسته شده کمتر شود .آن گاه c جوابِ معادله یِ $f(x) = 0$ است.

مثال . معادله ی کپلر به ازایِ $M = 0.3$ و $e = 0.15$ حل کنید.(با دقتِ 0.00001 رادیان)
حل .
ابتدا سه شرط را بررسی می کنیم:

$$M = E - e\sin E \Rightarrow 0.3 = E - 0.15\sin E \Rightarrow$$

$$\boxed{E - 0.15\sin E - 0.3 = 0 = F(E)}$$



I بازه یِ جواب را بررسی می کنیم :

$$-۱ \le \sin E \le ۱ \Rightarrow ۰.۱۵ \ge -۰.۱۵ \sin E \ge -۰.۱۵$$
$$\Rightarrow -۰.۱۵ \ge -۰.۱۵ \sin E - ۰.۳ \ge -۰.۴۵$$
$$\boxed{۰.۱۵ \le E \le ۰.۴۵}$$
$$\boxed{D_{f(x)} = [a,b] = [۰.۱۵, ۰.۴۵]}$$

II

$$f(b) = ۰.۰۸\ ,\ f(a) = -۰.۱۷$$
$$\Longrightarrow f(a) \cdot f(b) < ۰$$

III

$$f'(x) = \frac{d}{dE}(E - ۰.۱۵ \sin E - ۰.۳) = ۱ - ۰.۱۵ \cos E > ۰$$

توجه داریم که $\cos E$ در بازه ی ۰.۱۵ تا ۰.۴۵ مثبت است و $\cos E$ در این بازه ی کمتر از ۱ است.

پس شرایط برقرار است حال :

a^-	b^+	c	$f(c)$	$sign$
۰.۱۵	۰.۴۵	۰.۳۰۰۰۰	−۰.۰۴۴۳۲	−
۰.۳	۰.۴۵	۰.۳۷۵۰۰	+۰.۰۲۰۰۶	+
۰.۳	۰.۳۷۵	۰.۳۳۷۵۰	−۰.۰۱۲۱۶۹	−
۰.۳۳۷۸۵	۰.۳۷۵	۰.۳۵۶۲۵	+۰.۰۰۳۹۳	−
۰.۳۳۷۵	۰.۳۷۵	۰.۳۴۶۹	−۰.۰۰۴۱۲۷	−
۰.۳۴۶۸۷۵	۰.۳۵۶۲۵	۰.۳۵۱۵۶۲۵	−۰.۰۰۰۰۹	−
۰.۳۵۱۵۶۲۵	۰.۳۵۶۲۵	۰.۳۵۲۷۳	+۰.۰۰۱۹۲	+
۰.۳۵۱۵۶۲۵	۰.۳۵۳۹۰۶۲۵	۰.۳۵۲۷۳	+۰.۰۰۰۹۱	+
۰.۳۵۱۵۶۲۵	۰.۳۵۲۷۳۴۳۷۵	۰.۳۵۲۱۵	+۰.۰۰۰۴۱	+
۰.۳۵۱۵۶۲۵	۰.۳۵۲۱۴۸۴۳۷	۰.۳۵۱۸۵	+۰.۰۰۰۱۶	+
۰.۳۵۱۵۶۲۵	۰.۳۵۱۸۵۵۴۶۸	۰.۳۵۱۷۰	+۰.۰۰۰۰۳	+
۰.۳۵۱۵۶۲۵	۰.۳۵۱۷۰۸۹۴	۰.۳۵۱۶۳	−۰.۰۰۰۰۳	−
۰.۳۵۱۶۳۵۷۲	۰.۳۵۱۷۰۸۹۴	۰.۳۵۱۶۷	۰.۰۰۰۰۰۰	+
		$\Rightarrow \quad c =$ ۰.۳۵۱۶۷		

پس جوابِ معادله یِ ما برابر است با :

$$E = ۰.۳۵۱۶۷\, Rad = ۲۰^\circ ۸' ۵۷.۱۴''$$

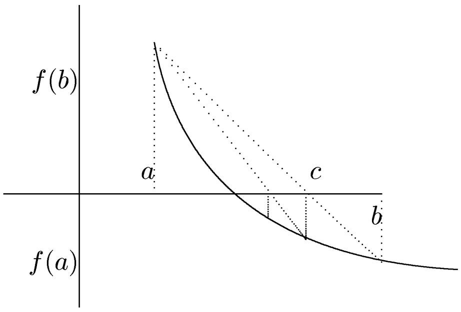
۳.۶ روش وتر

در این روش پس از برقراری ۳ شرط، وتری از نقطه یِ $M|_{f(b)}^{b}$ به $N|_{f(b)}^{a}$ می کشیم .این وتر محورِ ox را در نقطه ای چون c قطع می کند.اکنون اگر $f(c)$ با $f(a)$ هم علامت باشد ، a را با c عوض می کنیم و گرنه b را با c عوض می کنیم و دوباره کار را آغاز می کنیم .
دستورِکار چنین است: ابتدا معادله ی وتر MN را می نویسیم :

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$y = ۰ \Rightarrow x - a = -\frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow c = x = +\frac{a - b}{f(b) - f(a)} \cdot f(a)$$



مثال . معادله ی کپلر به ازای $M = ۰.۳$ و $e = ۰.۱۵$ حل کنید.(با دقت ۰.۰۰۰۰۱ رادیان)

حل .

سه شرط ، را قبلا بررسی کرده ایم ، حال با توجه به الگوریتم مذکور داریم:

$$c = \frac{a-b}{(b-a)+۰.۱۵(\sin a-\sin b)}\cdot(a-۰.۱۵\sin a-۰.۳)$$

حال :

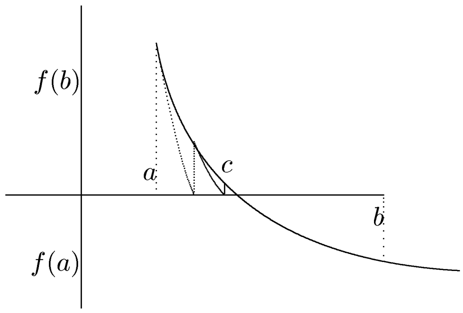
a^-	b^+	c	$f(c)$	$sign$
۰.۱۵	۰.۴۵	۰.۲۰۱۱۲	−۰.۱۲۸۸۳۶۷۱۷	−
۰.۲۰۱۱۲۹۷۴۶	۰.۴۵	۰.۱۵۰۰۳	−۰.۱۷۲۳۸۳۸۵۳	−
۰.۱۵۰۰۳۷۴۱۵	۰.۴۵	۰.۲۰۱۰۹	−۰.۱۲۸۸۷	−
۰.۲۰۱۰۹۲۴۱۱	۰.۴۵	۰.۱۵۰۱۵	−۰.۱۷۲۲۹	−
۰.۱۵۰۱۵۳۵۵۸	۰.۴۵	۰.۲۰۰۹۷	−۰.۱۲۸۹۷	−
۰.۲۰۰۹۷۶۵۳۹	۰.۴۵	۰.۱۵۰۲۷	−۰.۱۷۲۱۸	−
۰.۱۵۰۲۶۹۱۵	۰.۴۵	۰.۱۵۰۶۷	−۰.۱۷۱۸۴	−
۰.۲۰۰۴۵۵۰۴۱	۰.۴۵	۰.۱۵۰۷۹	−۰.۱۷۱۷۴	−
۰.۱۵۰۷۸۹۳۹	۰.۴۵	۰.۲۰۰۳۴	−۰.۱۲۹۵۰	−
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
		$C = ۰.۳۵۱۶۷$	۰.۰۰۰۰۰	

پس جواب معادله ی ما برابر است با :

$$E = ۰.۳۵۱۶۷\,Rad = ۲۰^\circ ۸' ۵۷.۱۴''$$

۴.۶ روش مماس (روش نیوتون — رافسون)

در این روش علاوه بر سه شرط قبلی باید علامتِ $f''(x)$ در بازه یِ $[a,b]$ تغییر نکند.در این روش پیاپی از نقطه یِ M یا N مماس بر خطِ $y = f(x)$ می کشیم .اگر همه یِ شرایط درست باشد ،آنگاه حاصلضربِ $f(x) \cdot f''(x)$ در یکی از دو نقطه مثبت و دیگری منفی می شود.نقطه مناسب برایِ شروع آنجا است که $f(x) \cdot f''(x)$ مثبت باشد.



حال مطابق شکل :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

به همین ترتیب می فهمیم که :

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

مثال . معادله ی کپلر به ازایِ $M = 0.3$ و $e = 0.15$ حل کنید.(با دقتِ 0.00001 رادیان)

حل .

ابتدا به بررسی شرط چهارم می پردازیم :

IV

$$f(E) = E - 0.15 \sin E - 0.3 \Rightarrow f''(x) = 0.15 \cos E > 0, \forall E \in [a,b]$$

حال :

x_1	$0.45 - \frac{0.45-0.15\sin 0.45-0.3}{1-0.15\cos 0.45} = 0.3520095$
x_2	0.35166699
x_3	0.351669897
x_4	0.351669879
$\Rightarrow E = 0.35166$	

پس جواب ِمعادله ی ِما برابر است با :

$$E = 0.35167\,Rad = 20^\circ 8' 57.14''$$

۵.۶ روش نقطه ی ثابت

در این روش ابتدا درستی ۳ شرط را بررسی می کنیم سپس تابع ِ $f(x) = 0$ را به آرایشی چون $x = g(x)$ در می آوریم .
آن آرایش قابل ِقبول است که‌دو شرط ِزیر را داشته باشد:

a.

$$x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \in [a,b]$$

b.

$$x \in [a,b] \quad , \quad |g'(x)| < 1$$

در حالت ِکلی پس از انتخاب ِشایسته می توان نشان داد که $x_n = g(x_n - 1)$ همگرا است.درنتیجه :

$$\lim_{x\to\infty} x_n = c$$

که البته در حالت خاصی که ذکر کرده ایم این روش جواب نمی دهد.

۶.۶ روش جانشانی های مکرر

این روش به نحوی همانند ِروش ِمماس است .
اگر E_0 مقدار ِتقریبی و $E_0 + \Delta E_0$ مقدار ِواقعی باشد،داریم :

$$(E_\circ + \Delta E_\circ) - e\sin(E_\circ + \Delta E_\circ) = M$$

$$\Rightarrow E_\circ + \Delta E_\circ - e\sin E \cdot \cos\Delta E_\circ - e\cos E \cdot \sin\Delta E_\circ = M$$

از آنجا که $\cos\Delta E_\circ \approx ۱$ و $\sin\Delta E_\circ \approx \Delta E_\circ$:

$$E_\circ + \Delta E_\circ - e\sin E_\circ - e\cos E_\circ \cdot \Delta E_\circ = M \Rightarrow (E_\circ - e\sin E_\circ) + \Delta E_\circ(۱ - e\cos E_\circ) = M$$

$$\Longrightarrow \Delta E_\circ = \frac{M - (E_\circ - e\sin E_\circ)}{۱ - e\cos E_\circ}$$

$$\Rightarrow E = \Delta E_\circ + E_\circ = \frac{M - (E_\circ - e\sin E_\circ)}{۱ - e\cos E_\circ} + E_\circ$$

اما مقدار $M = E_\circ$ انتخاب می کنیم .در نتیجه :

$$E_۱ = \frac{M - M \cdot e\cos M - e\sin M}{۱ - e\cos M}$$

$$E_۲ = E_۱ + \frac{M - (E_۱ - e\sin E_۱)}{۱ - e\cos E_۱}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{E_n = E_{n-۱} + \frac{M - (E_{n-۱} - e\sin E_{n-۱})}{۱ - e\cos E_{n-۱}}}$$

۷.۶ بسط تیلور[۱]

هر تابعِ اختیاری $g(x)$ را می توان به وسیله یِ سرری توانی از x نشان داد.

$$f(x) = a_\circ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + \cdots = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k\, x^k$$

در اینجا با فرضِ مجاز بودنِ مشتق گیری ،داریم:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = a_۱ + ۲a_۲ x + ۳a_۳ x^۲ + \cdots$$

با تعینِ $f'_\circ(x)$ در $x = \circ$ داریم:

$$a_۱ = f'(x)\big|_{x=\circ}$$

برای ِمشتق دوم داریم:

$$\frac{d^{2} f}{d x^{2}} = f''(x) = 2! a_2 + 3! a_3 x + \cdots$$

مجددا در $x = 0$ داریم:

$$2! a_2 = f''(x)|_{x=0} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(x)|_{x=0}$$

پس در حالت ِکلی داریم:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0) \cdot \frac{x^{2}}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^{3}}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x)\, x^{n}}{n!}$$

این سری اگر همگرا باشد ، می توان تقریب ِخوبی از $f(x)$ به ازای ِمقادیر ِکوچک ِx به دست می دهد.

حال با تقریب ِمرتبه سوم :

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x + f''(0) \cdot \frac{x^{2}}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^{3}}{3!}$$

$$M = E - e \sin E \Rightarrow \sin M = \sin(E - e \sin E) \equiv f(e)$$

دراینجا متغییر ِما $x = e$ است.در نتیجه:

$$f(e = 0) = 0, \qquad f'(e = 0) = -\cos E \cdot \sin E, \qquad f''(e = 0) = -\sin^{3} E$$

حال :

$$\sin M \cong \sin E - e \sin E \cos E - \frac{e^{2}}{2!} \sin^{3} E$$

$$\sin^{3} E = \sin E \cdot \frac{(1 - \cos^{2} E)}{2} = \frac{\sin E}{2} - \frac{1}{2} \sin E \cdot \cos 2E = \frac{1}{2} \sin E - \frac{1}{4} (\sin 3E - \sin E)$$

$$\Rightarrow \sin E = \sin M + \frac{1}{2} e \sin 2E + \frac{e^{2}}{2} [\frac{1}{2} \sin E - \frac{1}{4} \sin 3E + \frac{1}{4} \sin E]$$

حال برای ِادامه ی ِکار اینچنین میکنیم:

$$\sin 2M = \sin(2E - 2e \sin E) \equiv g(e)$$

$$f(e=۰)=\sin ۲E\,,\qquad f'(e=۰)=-۲\cos ۲E\sin E\qquad ,f''(e=۰)=-۴\sin ۲E\sin^{۲} E$$

$$\Rightarrow \sin ۲M=\sin ۲E-۲e\overbrace{\sin E\cos ۲E}^{\sin ۳E-\sin E}-۲e^{۲}\sin ۲E\,\overbrace{\sin^{۲} E}^{\frac{۱-\cos ۲E}{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin ۲E=\sin ۲M+۲e\sin ۳E+۲e\sin E+e^{۲}\sin ۲E-\frac{e^{۲}}{۲}\sin ۴E$$

باز دوباره :

$$\sin ۳M=\sin(۳E-۳e\sin E)\equiv h(e)$$

$$f(e=۰)=\sin ۳E,\qquad f'(e=۰)=-۳\cos ۳E\sin E,\qquad ,f''(e=۰)=-۹\sin ۳E\sin^{۲} E$$

$$\sin ۳M\cong \sin ۳E-۳e\ \overbrace{\cos ۳E\sin E}^{\frac{۱}{۲}\sin ۴E-\frac{۱}{۲}\sin ۲E}\ -\frac{۹}{۲}e^{۲}\sin ۳E\,\overbrace{\sin^{۲} E}^{\frac{۱-\cos ۲E}{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin ۳M=\sin ۳E-\frac{۳}{۲}e\sin ۴E+\frac{۳}{۲}e\sin ۲E-\frac{۹}{۴}e^{۲}\sin ۳E+\frac{۹}{۴}e^{۲}\sin ۳E\cos ۲E$$

$$\Rightarrow \sin ۳M=\sin ۳E(۱-\frac{۹}{۴}e^{۲}(۱-\cos ۲E))-۳e\sin ۲E(\cos ۲E+\frac{۱}{۲})$$

$$\cong \sin ۳E-۳e[\sin ۲M+۲e\sin ۳E+۲e\sin E+e^{۲}\sin ۲E-\frac{e^{۲}}{۲}\sin ۴E]$$

$$\cong (۱+۲e)\sin ۳E-۳e\sin ۲M-۶e^{۲}\sin E$$

$$\Rightarrow \sin ۳E=(۱-۲e)\sin ۳M+۳e(۱-۲e)\sin ۲M+۶e^{۲}(۱-۲e)\sin E$$

$$\Longrightarrow \sin ۳E=(۱-۲e)\sin ۳M+(۳e-۶e^{۲})\sin ۲M+۶e^{۲}\sin E$$

اکنون با جایگزاری داریم :

$$\sin E=\sin M+\frac{۱}{۲}e(\sin ۲M+۲e\sin ۳E+۲e\sin E)+\frac{e^{۲}}{۴}\sin E-\frac{e^{۲}}{۸}\sin ۳E+\frac{e^{۲}}{۸}\sin E$$

در پایان به دست می آوریم:

$$\boxed{\sin E = (۱ - \frac{e^۲}{۸})\sin M + \frac{۱}{۲}e\sin ۲M + \frac{۳}{۸}e^۲\sin ۳M}$$

مثال . معادله ی کپلر به ازای $M = ۰.۳$ و $e = ۰.۱۵$ حل کنید.(با دقت ۰.۰۰۰۰۱ رادیان)

حل .

طبق رابطه ای که به دست اوردیم:

$$E = \arcsin[(۱-\frac{(۰.۱۵)^۲}{۸})\sin(۰.۳)+\frac{۱}{۲}\times ۰.۱۵\sin(۲\times ۰.۳)+\frac{۳}{۸}(۰.۱۵^۲)\times\sin(۳\times ۰.۳)] = ۰.۳۵۱۶۸rad$$

۸.۶ بسط تیلور۲

هما نگونه که در قسمت قبل گفتیم :

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^n(x)\,x^n}{n!}$$

حال اگر $f(x) = \sin(x)$ اختیار کنیم آنگاه معادله ی کپلر به صورتِ زیر تبدیل می شود:

$$M - E + e\Big(E - \frac{E^۳}{۳!} + \frac{E^۵}{۵!} + \cdots\Big) = ۰$$

ما می توانیم بسط را تا هر چه قدر که بخواهیم گسترش دهیم اما تا مرتبه ۵ یا ۳ برای حل های معمولی کافی و مقبول است.اکنون باید این معادله را حل کنیم .ابتدا معادله را به فرم استاندارد باز نویسی می کنیم .

$$\Big(\frac{e}{۵!}\Big)E^۵ - \Big(\frac{e}{۳!}\Big)E^۳ + (e-۱)E + M = ۰$$

اکنون به بررسی تقریبی ریشه ی معادله می پردازیم .یکی از روش های حل روش فاکتور گیری درجه دوم است.ابتدا به دنبال دو عدد r و s هستیم به گونه ای که:

$$a_۱x^n+a_۲x^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}x+a_{n+۱} = (x^۲-rx-s)\Big(b_۱x^{n-۲}+b_۲x^{n-۳}+\cdots+b_{n-۲}+b_{n-۱}\Big)$$

سپس همین کار را برای چند جمله ای درجه $n-۲$ انجام می دهیم تا به درجه ی اول یا عدد ثابت برسیم.

چند جمله ای زیر را بنگرید :

$$a_۱x^n+a_۲x^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}x+a_{n+۱} = (x^۲-rx-s)\Big(b_۱x^{n-۲}+b_۲x^{n-۳}+\cdots+b_{n-۲}+b_{n-۱}\Big)$$

$$+b_n(x-r)+b_{n+1}$$

هدف به دست آوردنِ r و s مناسبی است به طوری که اندازه یِ b_n و b_{n+1} صفر شود یا به اندازه یِ کافی کوچک شود.برایِ رسیدن به این خواسته باید دستگاهِ دومعادله دو مجهولی زیر را حل کنیم .

$$\begin{cases} b_n(r,s)=0 \\ b_{n+1}(r,s)=0 \end{cases}$$

برایِ حلِ این دستگاه به روشِ تیلور عمل می کنیم

روشِ تیلور. دستگاهِ معادلاتِ زیر را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

ابتدا حدسِ اولیه ای چون (x_0,y_0) برای ریشه می زنیم .اکنون دستگاه را به صورتِ زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} f(x_0+h,y_0+k)=0 \\ g(x_0+h,y_0+k)=0 \end{cases}$$

آن ها را با بسطِ تیلور بسط می دهیم :

$$\begin{cases} f(x,y)=f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+k\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}+\cdots \\ g(x,y)=g(x_0,y_0)+h\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+k\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}+\cdots \end{cases}$$

که در آن $h=x-x_0$ و $k=y-y_0$ در نتیجه با اولین تقریب :

$$\begin{cases} 0=f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+k\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ 0=g(x_0,y_0)+h\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+k\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \end{cases}$$

حال این دستگاه را حل می کنیم

$$h=\frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} \qquad k=\frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}$$

h و k را در (x_0,y_0) محاسبه می کنیم و سپس از آن به عدد هایِ بهتری برایِ ریشه معادله ها می رسیم.

$$\begin{cases} x_1 = x_0+h_0 \\ y_1 = y_0+k_0 \end{cases}$$

و این کار را تکرار می کنیم:

$$\begin{cases} x_n &= x_{n-1} + h_{n-1} \\ y_n &= y_{n-1} + k_{n-1} \end{cases}$$

اکنون که روش ِتیلور را یاد گرفتیم به حل ِدستگاه مذکور می پردازیم. مطابق ِدستورِ تیلور :

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -b_n & \frac{\partial b_n}{\partial s} \\ -b_{n+1} & \frac{\partial b_{n+1}}{-\partial s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial b_n}{\partial r} & \frac{\partial b_n}{\partial s} \\ \frac{\partial b_{n+1}}{\partial r} & \frac{\partial b_{n+1}}{-\partial s} \end{vmatrix}} \qquad k = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial b_n}{\partial r} & -b_n \\ \frac{\partial b_{n+1}}{\partial r} & -b_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial b_n}{\partial r} & \frac{\partial b_n}{\partial s} \\ \frac{\partial b_{n+1}}{\partial r} & \frac{\partial b_{n+1}}{-\partial s} \end{vmatrix}}$$

حال به نحوه ی ِمحاسبه ی ِمولفه های ِدترمینان های ِبالا می پردازیم .

با بررسی متوجه می شویم: $b_i = a_i + rb_{i-1} + sb_{i-2}$. حال برای ِمحاسبه ی ِ $\frac{\partial b_n}{\partial r}$ و $\frac{\partial b_{n+1}}{\partial r}$:

$$\frac{\partial b_1}{\partial r} = 0$$

$$c_1 = \frac{\partial b_2}{\partial r} = b_1$$

$$c_2 = \frac{\partial b_3}{\partial r} = b_2 + rc_1$$

$$\vdots$$

$$c_{n-1} = \frac{\partial b_n}{\partial r} = b_{n-1} + rc_{n-2} + sc_{n-3}$$

$$c_n = \frac{\partial b_{n+1}}{\partial r} = b_n + rc_{n-1} + sc_{n-2}$$

در آخر برای ِیافتن ِ $\frac{\partial b_n}{\partial s}$ و $\frac{\partial b_{n+1}}{\partial s}$:

$$\frac{\partial b_1}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial s} = 0$$

$$\vdots$$

$$c_{n-2} = \frac{\partial b_n}{\partial s} = b_{n-1} + rc_{n-2} + sc_{n-3}$$

$$c_{n-1} = \frac{\partial b_{n+1}}{\partial s} = b_n + rc_{n-1} + sc_{n-2}$$

اکنون به نتیجه نهایی می رسیم

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -b_n & c_{n-2} \\ -b_{n+1} & c_{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n & c_{n-1} \end{vmatrix}} \qquad k = \frac{\begin{vmatrix} c_{n-1} & -b_n \\ c_n & -b_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n & c_{n-1} \end{vmatrix}}$$

مثال . معادله ی کپلر به ازای $M = 0.3$ و $e = 0.15$ حل کنید.(با دقت ۰.۳ رادیان)

حل .

با بسطِ تیلورِ معادله کپلر به دست آوردیم که :

$$\left(\frac{0.15}{5!}\right)E^5 - \left(\frac{0.15}{3!}\right)E^3 + (0.15 - 1)E + 0.3 = 0$$

$$0.000125E^5 - 0.025E^3 - 0.85E + 0.3 = 0$$

با صرف نظر از جمله ی بسیار کوچکِ مرتبه پنجم :

مقدار اولیه های $r_0 = -1$ و $s_0 = 0.5$ را اتخاذ می کنیم حال b_i و c_i را تعیین می کنیم :

a_i		b_i		c_i	
a_1	۰.۰۲۵	b_1	۰.۰۲۵	c_1	۰.۰۲۵
a_2	۰	b_2	−۰.۰۲۵	c_2	۰.۰۵
a_3	۰.۸۵	b_3	۰.۸۸۷۵	c_3	۰.۸۵
a_4	۰	b_4	−۰.۹	c_4	−۱.۷۲۵

پس دترمینان ها می شوند:

$$h_0 = \frac{\begin{vmatrix} -b_3 & c_1 \\ -b_4 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -0.8875 & 0.025 \\ 0.9 & 0.05 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.05 & 0.025 \\ 0.85 & 0.05 \end{vmatrix}} = 3.57$$

$$k_{۰} = \frac{\begin{vmatrix} c_{۲} & -b_{۳} \\ c_{۳} & -b_{۴} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{۲} & c_{۱} \\ c_{۳} & c_{۲} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} ۰.۰۵ & -۰.۸۸۷۵ \\ ۰.۸۵ & ۰.۹ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۰.۰۵ & ۰.۰۲۵ \\ ۰.۸۵ & ۰.۰۵ \end{vmatrix}} = -۴۲.۶۳$$

پس :

$$r_{۱} = r_{۰}+h_{۰} = -۱+۳.۵۷ = ۲.۵۷ \qquad , \qquad s_{۱} = s_{۰}+k_{۰} = ۰.۵-۴۲.۶۳ = -۴۲.۱۳$$

دوباره :

a_i		b_i		c_i	
$a_{۱}$	۰.۰۲۵	$b_{۱}$	۰.۰۲۵	$c_{۱}$	۰.۰۲۵
$a_{۲}$	۰	$b_{۲}$	۰.۰۶۴۲۵	$c_{۲}$	۰.۱۲۸۵
$a_{۳}$	۰.۸۵	$b_{۳}$	−۰.۰۳۸۱۲	$c_{۳}$	−۰.۷۶۱۱۳
$a_{۴}$	۰	$b_{۴}$	−۲.۸۰۴۸	$c_{۴}$	−۱۰.۳۱۱۶

و

$$h_{۱} = \frac{\begin{vmatrix} -b_{۳} & c_{۱} \\ -b_{۴} & c_{۲} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{۲} & c_{۱} \\ c_{۳} & c_{۲} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} ۰.۰۳۸۱۲ & ۰.۰۲۵ \\ ۲.۸۰۴۸ & ۰.۱۲۸۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۰.۱۲۸۵ & ۰.۰۲۵ \\ -۰.۷۶۱۱۳ & ۰.۱۲۸۵ \end{vmatrix}} = -۱.۹۴۳$$

$$k_{۱} = \frac{\begin{vmatrix} c_{۲} & -b_{۳} \\ c_{۳} & -b_{۴} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{۲} & c_{۱} \\ c_{۳} & c_{۲} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} ۰.۱۲۸۵ & ۰.۰۳۸۱۲ \\ ۰.۷۶۱۱۳ & ۲.۸۰۴۸ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۰.۱۲۸۵ & ۰.۰۲۵ \\ -۰.۷۶۱۱۳ & ۰.۱۲۸۵ \end{vmatrix}} = ۹.۸۷$$

و باز

$$r_{۲} = r_{۱} + h_{۱} = ۰.۶۲۷ \qquad , \qquad s_{۲} = s_{۱} + k_{۱} = -۳۲.۲۶$$

a_i		b_i		c_i	
$a_{۱}$	۰.۰۲۵	$b_{۱}$	۰.۰۲۵	$c_{۱}$	۰.۰۲۵
$a_{۲}$	۰	$b_{۲}$	۰.۰۱۵۶۷۵	$c_{۲}$	−۰.۷۹۰۸
$a_{۳}$	۰.۸۵	$b_{۳}$	−۰.۷۹۶۶	$c_{۳}$	−۲.۱۰۰
$a_{۴}$	۰	$b_{۴}$	−۱.۰۰۵	$c_{۴}$	۲۳.۱۸۹

$$h_{۲} = \frac{\begin{vmatrix} -b_{۳} & c_{۱} \\ -b_{۴} & c_{۲} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{۲} & c_{۱} \\ c_{۳} & c_{۲} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} ۰.۷۹۶۶ & ۰.۰۲۵ \\ -۱.۰۰۵ & -۰.۷۹۰۸ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۰.۷۹۰۸ & ۰.۰۲۵ \\ -۲.۱۰۰ & -۰.۷۹۰۸ \end{vmatrix}} = -۰.۹۱$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & -b_3 \\ c_3 & -b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -0.7908 & 0.7966 \\ -2.100 & 1.005 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.7908 & 0.025 \\ -2.100 & -0.7908 \end{vmatrix}} = 1.29$$

در تکرار دیگر

$$r_3 = r_2 + h_2 = -0.283 \qquad , \qquad s_3 = s_2 + s_2 = -30.97$$

a_i		b_i		c_i	
a_1	0.025	b_1	0.025	c_1	0.025
a_2	0	b_2	-0.0070	c_2	-0.01415
a_3	0.85	b_3	0.0777	c_3	-0.6925
a_4	0	b_4	0.1948	c_4	-0.3834

$$h_3 = \frac{\begin{vmatrix} -b_3 & c_1 \\ -b_4 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -0.0777 & 0.025 \\ -0.1948 & -0.01415 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.01415 & 0.025 \\ -0.6925 & -0.01415 \end{vmatrix}} = 0.34$$

$$k_3 = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & -b_3 \\ c_3 & -b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -0.01415 & -0.0777 \\ -0.6925 & -0.1948 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.01415 & 0.025 \\ -0.6925 & -0.01415 \end{vmatrix}} = -2.9$$

$$r_4 = r_3 + h_3 = 0.057 \qquad , \qquad s_4 = s_3 + k_3 = -33.87$$

گفتیم که هدف این است که جمله های‌ِهای $b_n(x-r)+b_{n-1}$ باید تا جای‌ِممکن به صفر نزدیک شوند.برای این که محاسباتِ‌ما از دقتی که نیاز داریم بشتر باشد باید $|b_n|+|b_{n+1}|$ کمتر از دقت ما باشد .یعنی در اینجا $|b_n|+|b_{n+1}| < 0.3$ که بعد از چهار مرحله به دست آورده ایم $|b_3|+|b_4| \leq 0.3$: اکنون با توجه به توضیحاتِ‌قبلی

$$\overbrace{0.025}^{a_1}x^3 + \overbrace{0.85}^{a_3}x \overbrace{-0.3}^{a_4} = (x^2 - rx - s)(b_1x + b_2) = 0$$

$$= (x^{۲} + ۰.۰۵۷x + ۳۳.۸۷)(۰.۰۲۵x + ۰.۰۰۷) \Rightarrow x_{۳} = ۰.۲۸$$

که جواب ما برابر است: $E \cong ۰.۲۸rad$

۹.۶ بسط فوریه

بسطِ فوریه برای بسط دادنِ توابعِ مثلثاتی بسیار کارآمد است،معادله یِ کپلر را می توان این گونه بسط داد:

$$M = E - e\sin E \Rightarrow E = M + e\sin E$$

$$E = M + \sum_{n=۱}^{\infty}[\frac{۲}{n}J_n(N\,e)\ \sin(n\,M)]$$

به طوری که $J_n(n\,e)$ رابطه یِ بسل نام دارد که تعریف می شود:

$$J_n(n\,e) = \sum_{j=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^j}{j!(n+j)!}(\frac{n\,e}{۲})^{n+۲j}$$

در نتیجه :

$$E \cong M + [۲J_{۱}(e)\sin M] + [J_{۲}(۲e)\sin ۲M] + [\frac{۲}{۳}J_{۳}(۳e)\sin ۳M] + \cdots$$

از طرفی :

$$J_{۱}(e) = \frac{e}{۲} - \frac{e^{۳}}{۱۶} + \frac{e^{۵}}{۳۸۴} + \cdots$$

$$J_{۲}(e) = \frac{e^{۲}}{۲} - \frac{e^{۴}}{۶} + \frac{e^{۶}}{۴۸} + \cdots$$

$$J_{۳}(e) = \frac{۹e^{۳}}{۱۶} - \frac{۸۱e^{۵}}{۲۵۶} + \frac{۷۲۹e^{۷}}{۱۰۲۴۰}$$

با جایگزاری تا مرتبه ۵ام داریم :

$$E = M + (e - \frac{e^{۳}}{۸} + \frac{e^{۵}}{۱۹۲})\sin M + (\frac{e^{۲}}{۲} - \frac{e^{۴}}{۶})\sin ۲M + (\frac{۳e^{۳}}{۸} - \frac{۲۷e^{۵}}{۱۲۸})\sin ۳M$$

وتا مرتبه سوم داریم:

$$\boxed{E = M + e\sin M + \frac{e^{۲}}{۲}\sin ۲M + \frac{۳e^{۳}}{۸}\sin ۳M}$$

و در نقاطِ نزدیک به حضیض به راحتی می توان نشان داد که :

$$E \cong M[1 + e + e^2 + e^3]$$

مثال . معادله ی کپلر به ازای $M = 0.3$ و $e = 0.15$ حل کنید.(با دقتِ ۰.۰۰۰۰۱ رادیان)

حل .

مطابق بسطِ مرتبه سه ی سریِ فوریه:

$$E = 0.3 + 0.15 \times \sin 0.3 + \frac{(0.15)^2}{2} \times \sin 0.6 + \frac{3 \times (0.15)^3}{8} \times \sin 0.9 = 0.35167 rad$$

۷ اسم های خاص

[1] Kepler

[2] Teylor

[3] Fourier

۸ مراجع

[1] W.m.Smart;“spherical astronomy”,chapter 5

[2] Arya.Atam Parkash ;“Introduction to Celestial Mechanics”,chapter 6

LN-02

Kepler's Equation;

Solving ways and Survey in Gravitional Orbits

Ali Izadi Rad hiairno@yahoo.com